Décomposition de Dunford

Proposition 1. *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $F \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de f. Soit $F = \beta M_1^{\alpha_1} \cdots M_s^{\alpha_s}$ la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ du polynôme F. Pour tout i, on note $N_i = \operatorname{Ker} M_i^{\alpha_i}(f)$.*

(i) $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$

(ii) Pour tout i, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en f.

Démonstration.

Le fait que $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$ résulte du théorème des noyaux.

Pour tout i, notons $Q_i = \prod_{j \neq i} M_j^{\alpha_j}$. Aucun facteur n'est commun à tous les Q_i, c'est-à-dire que les Q_i sont sont premiers entre eux dans leur ensemble. En appliquant l'égalité de Bézout, on voit qu'il existe $U_1, \ldots, U_s \in \mathbb{K}[X]$ tels que $U_1Q_1 + \ldots + U_sQ_s = 1$, de sorte que :

$$Id_E = U_1(f) \circ Q_1(f) + \ldots + U_s(f) \circ Q_s(f)$$

Pour tout i, on note $P_i = U_iQ_i$ est $p_i = P_i(f)$. On a :

$$Id_E = \sum_{i=1}^{s} p_i \tag{$\star$}$$

Par ailleurs, pour tout $j \neq i$, F divise Q_iQ_j, donc :

$$\forall j \neq i,\ p_i \circ p_j = Q_iQ_j(f) \circ U_iU_j(f) = 0 \tag{$\star\star$}$$

On déduit de ($\star$) que pour tout i, $p_i = \sum_{j=1}^{s} p_i \circ p_j$ et donc d'après ($\star\star$), $p_i = p_i^2$. Les p_i sont donc des projecteurs.

Montrons que pour tout i, $\operatorname{Im} p_i = N_i$.
Soit $y \in p_i(x) \in \operatorname{Im} p_i$. On a :

$$M_i^{\alpha_i}(f)(y) = M_i^{\alpha_i}(f) \circ P_i(f)(x) = U_i(f) \circ F(f)(x) = 0$$

Ainsi, $\operatorname{Im} p_i \subseteq \operatorname{Ker} M_i^{\alpha_i}(f) = N_i$.
Il reste à montrer l'inclusion réciproque. Soit $x \in N_i = \operatorname{Ker} M_i^{\alpha_i}(f)$. D'après ($\star$), $x = p_1(x) + \ldots + p_s(x)$. Or, pour tout $j \neq i$, $p_j(x) = U_j(f) \circ Q_j(f)(x) = 0$, car $M_i^{\alpha_i}$ divise Q_j, donc finalement $x = p_i(x) \in \operatorname{Im} p_i = N_i$.

Il ne reste plus qu'à montrer que pour tout i, $\operatorname{Ker} p_i = \bigoplus_{j \neq i} N_j$.
Pout tout $j \neq i$, on a $N_j \subseteq \operatorname{Ker} p_i$, car si $x \in N_j$, alors $p_i(x) = U_i(f) \circ Q_i(f)(x) = 0$ car $M_j^{\alpha_j}$ divise Q_j.
On en déduit que $\bigoplus_{j \neq i} N_j \subseteq \operatorname{Ker} p_i$.
Soit maintenant $x \in \operatorname{Ker} p_i$. D'après ($\star$), $x = \sum_{j \neq i} p_j(x)$ donc $x \in \bigoplus_{j \neq i} N_j$. Finalement, $\operatorname{Ker} pi = \bigoplus_{j \neq i} N_j$.
La démonstration est terminée puisque, par construction, les projecteurs p_i sont des polynômes en f.

$\square$

Théorème 2 (Décomposition de Dunford)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple (n, d) d'endomorphismes tels que :*

(i) d est diagonalisable, n est nilpotent

(ii) $f = d + n$ et n et d commutent

De plus, d et n sont des polynômes en f

Démonstration.

Existence :
Écrivons $\chi_f(X) = (-)^n \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et pour tout i, notons $N_i = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i)^{\alpha_i}$.
La proposition précédente s'applique avec $F = \chi_f$ et pour tout i, $M_i = X - \lambda_i$.
En utilisant les notations précédentes, pour tout i, $p_i = P_i(f)$ est le projecteur sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$.
Posons $d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i$ (ainsi constuit, d est diagonalisable) et $n = f - d = \sum_{i=1}^{s} (f - \lambda_i Id_E) p_i$.
En utilisant le fait que les p_i sont des projecteurs, que $p_i \circ p_j = 0$ si $j \neq i$, et que les p_i commutent avec f (ce sont des polynômes en f), on a :

$$\forall q \in \mathbb{N},\ n^q = \sum_{i=1}^{s} (f - \lambda_i Id_E)^q p_i$$

Si $q = \sup_i \alpha_i$, on a $(f - \lambda_i Id_E)^q p_i = ((X - \lambda_i)^q P_i)(f) = 0$ pour tout i, car χ_f divise $(X - \lambda_i)^q P_i$, donc $n^q = 0$.
Ainsi construits, d et n sont des polynômes en f vérifiant (1) et (2).

Unicité :
Soit (d', n') un autre couple vérifiant (1) et (2).
Les endomorphismes f, d, n , d' et n' commutent car ce sont tous des polynômes en f.
Ainsi, d et d' sont diagonalisables dans une même base, ce qui entraîne que $d - d'$ est diagonalisable.
Comme $d - d' = n' - n$ est nilpotente, on en déduit que $d - d' = n - n' = 0$.
D'où l'unicité.

□

Conclusion. Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé s'écrit de manière unique comme la somme d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endormorphisme nilpotent qui commutent et qui sont des polynômes du premier endomorphisme. ◁

Références

[Gou] Xavier Gourdon. *Les Maths en Tête : Algèbre.* Ellipses, 2e edition